Решение задач теоретического тура

1. Проект сети обитаемых станций на поверхности Марса предусматривает запуск его искусственного спутника на экваториальную круговую синхронную орбиту для обеспечения постоянной связи между базами. Самую северную из станций планируется разместить в непосредственной близости от южного края постоянной части северной полярной шапки Марса, который удален от его северного полюса на $600 км$, а самую южную - на таком же расстоянии от южного полюса.

а) Чему равен радиус орбиты спутника?

б) Какова высота спутника над поверхностью Марса.

в) Смогут ли обитатели самой северной станции, поддерживать связь с другими базами с помощью этого спутника?

г) Достаточно ли одного спутника для установления связи между всеми станциями? Если нет, то каково их минимальное количество?

Указание: используйте только следующие данные (все для Марса): ускорение свободного падения на поверхности $g = 3{,}711 \frac{м}{с^2}$, сидерический период вращения $T = 24^h 37^m 23^s$, средний радиус $R = 3389 км$.

Решение:

а) Поскольку: $g = \frac{GM}{R^2} \Rightarrow GM = gR^2, T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM}$, то радиус орбиты спутника:

$$r = \left(\frac{gR^2T^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{3{,}711 \cdot 3389000^2 (24 \cdot 3600 + 37 \cdot 60 + 23)^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} = 20395000(м) = 20395 км.$$

б) Высота спутника над поверхностью Марса: $h = r - R = 20395 - 3389 = 17006(км)$

в) Самая северная широта, на которой спутник будет виден, находится из условия: $cos\varphi = \frac{R}{r}$.

Отсюда: $\varphi = arccos\left(\frac{R}{r}\right) = arccos\left(\frac{3389}{20390}\right) = 80°26'$.

Широта южного края северной полярной шапки: $\varphi_0 = 90° - \frac{600}{3389} \cdot \frac{180°}{\pi} = 79°51'$.

Поскольку $\varphi > \varphi_0$, то обитатели самой северной станции будут «видеть» спутник при условии, что он находится вблизи их меридиана, и смогут поддерживать постоянную связь со станциями, которые отстоят от «подспутниковой» точки на угловое расстояние меньшее, чем $\alpha = 80°26'$.

г) Для определения минимального числа спутников, найдем $\Delta\lambda$ - разность марсианских долгот спутника и точки южного края северной полярной шапки, в которой он находится в плоскости математического горизонта:

$$cos\,\alpha = cos\,\Delta\lambda \cdot cos\,\varphi_0 + sin\,\Delta\lambda \cdot sin\,\varphi_0 \cdot cos\,90° \Rightarrow \Delta\lambda = arccos\left(\frac{cos\,\alpha}{cos\,\varphi_0}\right) = 19°21'.$$

Учитывая, что $2\Delta\lambda = 38°42'$, для установления постоянной связи между всеми станциями, независимо от их марсианской долготы, требуется 10 спутников.

Ответ: а) $r = 20395 км$, б) $h = 17006 км$, в) «да», г) 10 спутников.

2. С северного полюса Земли, под углом $45°$ к горизонту запущен снаряд, который попадает в точку, лежащую на экваторе. Используя постоянную всемирного тяготения $G$, массу $M$ и радиус $R$ Земли, выведите формулы для определения:

а) начальной скорости снаряда;

б) его максимальной высоты над поверхностью Земли;

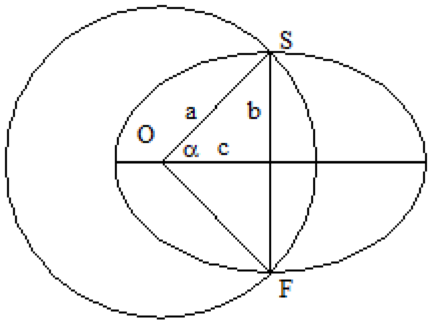
в) времени полета снаряда.

г) расстояния, которое пролетит снаряд.

(Сопротивлением воздуха пренебречь.)

Решение:

Поскольку угол вылета снаряда $\alpha = 45°$, то точки старта и финиша лежат на концах малой оси эллипса:




Поэтому большая полуось эллипса равна радиусу Земли: $a = R, b = c = \frac{\sqrt{2}}{2}R$

а) Начальную скорость снаряда определим по формуле:

$v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R}}$.

б) Максимальная высота полета снаряда над поверхностью Земли:

$h_{MAX} = a + c - R = \frac{\sqrt{2}}{2}R$.

в) Время полета снаряда находим из второго закона Кеплера: $t = \frac{S_1}{S}T$.

Здесь $S = \pi ab = \pi\frac{\sqrt{2}}{2}R^2$ - площадь эллипса, $S_1 = \frac{1}{2}R^2 + \frac{1}{2}\pi ab = \frac{1}{2}\left(1 + \pi\frac{\sqrt{2}}{2}\right)R^2$

площадь «медиатора» между точками старта и финиша, $T = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{GM}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{GM}}$.

В итоге: $t = \left(\sqrt{2} + \pi\right)\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$.

г) Снаряд пролетит половину длины эллипса.

Ответ: а) $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R}}$, б) $h_{MAX} = \frac{\sqrt{2}}{2}R$, в) $t = \left(\sqrt{2} + \pi\right)\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$, г) половина длины эллипса с полуосями $a = R, b = \frac{\sqrt{2}}{2}R$ (элементарно не выражается!).

3. Некоторая классическая цефеида в процессе пульсаций изменяет свой спектральный класс с $F7\ (T_1 = 6400K)$ до $G3\ (T_2 = 5600K)$. При этом изменение её видимой звёздной величины $\Delta m = 0{,}48^m$, наблюдаемый период пульсаций $P = 10^d 4^h 47^m$, а линия $H_\alpha\ (\lambda_0 = 656{,}28\,нм)$ атомарного водорода в спектре звезды смещена в коротковолновую область на $\Delta\lambda = -0{,}09\,нм$.

Определите:

а) истинный период изменения блеска цефеиды;

б) её минимальную и максимальную абсолютную звёздную величину;

в) во сколько раз максимальный радиус этой цефеиды больше минимального?

<u>Подсказка:</u> считайте, что средняя звездная величина есть среднее арифметическое ее минимального и максимального значения.

Решение:

а) Период пульсации цефеиды связан со скоростью движения ее по отношению к наблюдателю:

$$\frac{P - P_0}{P_0} = \frac{v}{c} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}.$$

Отсюда:

$$P_0 = \frac{\lambda_0}{\lambda} P = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \Delta\lambda} P = \frac{656{,}28}{656{,}28 - 0{,}09}\left(10 + 4/24 + 47/1440\right) = 10{,}20077^d = 10^d 4^h 49^m$$

б) Средняя абсолютная звездная величина цефеиды связана с периодом ее пульсации соотношением:

$$M = -1{,}25 - 3{,}00\,lg\,P = -1{,}25 - 3{,}00 \cdot lg\,10{,}200077 = -4{,}26^m.$$

В максимуме и минимуме своего блеска цефеида находится от нас на одном и том же расстоянии, поэтому $\Delta M = \Delta m$

Поскольку мы считаем, что $M = \dfrac{M_{MAX} + M_{MIN}}{2}$, то

$$M_{MAX} = M + \frac{\Delta M}{2} = -4{,}26 + 0{,}24 = -4{,}02^m,$$

$$M_{MIN} = M + \frac{\Delta M}{2} = -4{,}26 - 0{,}24 = -4{,}50^m.$$

в) Из формулы Погсона:

$$\frac{L_{MAX}}{L_{MIN}} = 10^{0{,}4\Delta M} = \frac{R_1^2}{R_2^2}\frac{T_1^4}{T_2^4}.$$

Отсюда:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{T_1^2}{T_2^2} \cdot 10^{-0{,}2\Delta M} = \frac{6400^2}{5600^2} 10^{-0{,}2 \cdot 0{,}48} = 1{,}05.$$

Ответ: а) $P_0 = 10^d 4^h 49^m$, б) $M_{MAX} = -4{,}02^m$, $M_{MIN} = -4{,}50^m$, в) $\dfrac{R_2}{R_1} == 1{,}05$.

4. Сверхновая 1987, находящаяся в Большом Магеллановом Облаке на расстоянии 168000 световых лет от нас, в максимуме яркости имела видимую звездную величину $m_1 = +3{,}0^m$. В период времени с 15.05.1987 года по 4.02.1988 года ее яркость уменьшалась по экспоненциальному закону $B = B_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ и достигла предела видимости невооруженным глазом $m_2 = +6{,}0^m$.

а) В каком созвездии она наблюдалась?

б) Чему равна максимальная светимость данной сверхновой?

в) Определите величину $\tau$ в сутках.

г) Найдите последнюю дату наблюдений, когда эту сверхновую можно было увидеть в $D = 10\,см$ телескоп, эффективность пропускания которого $\eta = 70\%$. Диаметр человеческого зрачка примите равным $d = 0{,}5\,см$.

(Абсолютная звездная величина Солнца $M_S = 4{,}83^m$).

Решение:

а) Золотая Рыба.

б) Определяем абсолютную звездную величину в максимуме блеска:

$$M = m + 5 - 5 lg\, r = 3{,}00 + 5 - 5 \cdot lg \frac{168000}{3{,}26} = -15{,}56^m$$

Светимость сверхновой в максимуме блеска:

$$L = 10^{0{,}4(M_S - M)} = 10^{0{,}4(4{,}83+15{,}56)} = 1{,}43 \cdot 10^8 L_S.$$

в) Запишем два соотношения:

$$\left.\begin{aligned} & B = B_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = B_0 \cdot 10^{-\frac{t}{\tau} lg\, e} \\ & \frac{B}{B_0} = 10^{0{,}4(m_1 - m_2)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow m_2 - m_1 = 2{,}5 \frac{t \cdot lg\, e}{\tau}$$

Здесь $t = 265\,суток$ - целое число суток с 15.05.1987 года до 4.02.1988.

Отсюда:

$$\tau = \frac{2{,}5t}{m_2 - m_1} lg\, e = \frac{2{,}5 \cdot 265}{6-3} lg\, e = 95{,}9\,суток.$$

г) Определим предельную видимую звездную величину $m_3$ для нашего телескопа:

$$\frac{D^2}{d^2}\eta = 10^{0{,}4(m_3 - m_2)}$$

Отсюда:

$$m_3 = 2{,}5 lg\left(\frac{D^2}{d^2}\eta\right) + m_2 = 2{,}5 lg\left(\frac{10^2}{0{,}5^2} \cdot 0{,}7\right) + 6{,}0 = 12{,}12^m$$

Из полученной в пункте в) формулы, находим время, через которое видимая звездная величина изменится от $m_1$ до $m_3$:

$$\Delta t = \frac{(m_3 - m_1)\tau}{2{,}5 \cdot lg\, e} = \frac{(12{,}12 - 3{,}00) \cdot 95{,}9}{2{,}5 \cdot lg\, e} = 805\,суток.$$

К 15.05.1987 прибавляем 805 суток, получаем 28.07.1989.

Ответ: а) Золотая Рыба, б) $L = 1{,}43 \cdot 10^8 L_S$, в) $\tau = 95{,}9\,суток$, г) 28.07.1989.

5. Наблюдаемое в настоящее время реликтовое изучение обладает высокой степенью изотропности и спектром, свойственным для абсолютно чёрного тела с температурой $T_2 = 2{,}73 K$. Оно начало «бороздить» просторы Вселенной при возрасте последней $t_1 = 400000 \, лет$ и температуре $T_1 = 3000 K$. Приняв зависимость масштабного фактора от времени $R(t) \sim t^{\frac{2}{3}}$, определите, в рамках плоской Вселенной:

а) возраст Вселенной;

б) плотность Вселенной в настоящее время;

в) красное смещение, соответствующее моменту возникновения реликтового излучения;

г) длину волны реликтового излучения $5{,}00 \, млрд.лет$ тому назад.

Подсказка: величину постоянной Хаббла в задаче надо рассчитать.

($b = 2{,}90 \cdot 10^{-3} K \cdot м$, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{Н \cdot м^2}{кг^2}$).

Решение:

а) Используем зависимость масштабного фактора от времени:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow t_2 = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{3}{2}} t_1 = \left(\frac{3000}{2{,}73}\right)^{\frac{3}{2}} 400000 = 14{,}6 \, млрд.лет$$

Это время соответствует значению постоянной Хаббла:

$$H = \frac{1}{t_2} = 2{,}17 \cdot 10^{-18} с^{-1}$$

б) Плотность Вселенной (плоской) определим по формуле:

$$\rho = \frac{3H^2}{8\pi G} = \frac{3 \cdot \left(2{,}17 \cdot 10^{-18}\right)^2}{8 \cdot \pi \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}} = 8{,}46 \cdot 10^{-27} \left(\frac{кг}{м^3}\right)$$

в) Для определения красного смещения используем формулу:

$$z_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1 = \frac{T_1}{T_2} - 1 = \frac{3000}{2{,}73} - 1 = 1089.$$

г) Длину волны реликтового излучения $\Delta t = 5{,}00 \, млрд.лет$ тому назад найдем из условия:

$$\lambda_3 = \left(\frac{t_2 - \Delta t}{t_2}\right)^{\frac{2}{3}} \lambda_2 = \left(\frac{t_2 - \Delta t}{t_2}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{b}{T_2} = \left(\frac{14{,}6 - 5{,}0}{14{,}6}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{2{,}90 \cdot 10^{-3}}{2{,}73} = 0{,}00141(м) = 1{,}41 мм.$$

Ответ: а) $t_2 = 14{,}6 \, млрд.лет$, б) $\rho = 8{,}46 \cdot 10^{-27} \frac{кг}{м^3}$, в) $z_1 = 1089$, г) $\lambda_3 = 1{,}41 мм$.

Критерии оценивания: в каждой задаче по 4 пункта, каждый оценивается из 5 баллов - общее количество баллов за теоретический тур 100.